ÉTABLISSEMENT D'ENSEIGNEMENT
POUR ADULTES ET DE FORMATION CONTINUE
EAFC SUD-LUXEMBOURG

WALLONIE-BRUXELLES
ENSEIGNEMENT

ALGÈBRE ET ANALYSE
REMÉDIATION

DOMINIQUE LIEFFRIG

2021/2022

http:// www.promsoc-arlon.be

iepsarlon@gmail.com

www.facebook.com/promsocarlon

Implantation ARLON
Chemin de Weyler 2
6700 ARLON
Tél: +32(0)63 230.240
Fax: +32(0)63 230.245

Implantation MUSSON
Rue Jean Laurent 8
6750 MUSSON

Implantation ATHUS
Rue Neuve 32
6791 ATHUS
Tél: +32(0)63 380.277
Fax: +32(0)63 388.246

Implantation VIRTON
Avenue Bouvier 19
6760 VIRTON
Tél: +32(0)63 570.476
Fax: +32(0)63 455.578

TABLE DES MATIÈRES

ALGÈBRE **1**
1 QUELQUES BASES 1
1.1 Expressions algébriques *1*
1.2 Les puissances *1*
1.3 Les radicaux *4*
1.4 Valeur absolue *6*
1.5 Division d'un polynôme par x-a *7*
2 ÉQUATIONS 8
2.1 Équations du premier degré *8*
2.2 Équations du second degré *12*
2.2.1 Définition 12
2.2.2 Résolution des équations du second degré 12
2.2.3 Exercices 12
2.3 Équations du type « Produit de facteurs égalé à 0 » *13*
2.3.1 Définition 13
2.3.2 Résolution des équations du type « Produit de facteurs égalé à 0 » 14
2.3.3 Exercices 14
2.4 Équations fractionnaires (l'inconnue est présente au dénominateur) *14*
2.4.1 Définition 14
2.4.2 Résolution des équations fractionnaires 14
2.5 Équations bicarrées *15*
2.5.1 Définition 15
2.5.2 Résolution des équations bicarrées 15
2.6 Équations irrationnelles *15*
2.6.1 Définition 15
2.6.2 Résolution des équations irrationnelles 15
2.7 Exercices concernant les équations fractionnaires, bicarrées et irrationnelles *16*
3 SYSTÈMES D'ÉQUATIONS 17
3.1 Définition *17*
3.2 Résolution des systèmes d'équations *17*
3.3 Résolution de problèmes *17*
ANALYSE **18**
1 LES FONCTIONS 18
1.1 Introduction *18*
1.1.1 Définitions 18
1.1.2 Exercices 20
1.2 Déterminer le domaine de définition d'une fonction à partir de son graphique *24*
1.2.1 Présentation 24
1.2.2 Exercices 25
1.3 Déterminer le domaine de définition d'une fonction à partir de son expression analytique *26*
1.3.1 Présentation 26
1.3.2 Exercices 26
1.4 Comment comparer des fonctions à partir de leurs graphiques ? *26*
1.5 Comment associer une modification de l'expression analytique à une transformation graphique ? *28*
1.6 Comment additionner, multiplier ou diviser deux fonctions ? *29*
1.7 Qu'est-ce qu'une fonction homographique ? *30*
1.8 Comment composer des fonctions ? *32*
1.9 Comment décomposer une fonction ? *33*
2 LIMITES ET ASYMPTOTES 34
2.1 Introduction *34*
2.2 Théorie *34*
2.3 Exercices *35*
3 DÉRIVÉES 38
3.1 Introduction *38*
3.2 Théorie *38*
3.3 Exercices *38*
4 ÉTUDES DE FONCTIONS ET AUTRES APPLICATIONS 42
4.1 Théorie *42*
4.2 Exercices *42*
4.2.1 Les fonctions dans la vie quotidienne 42
4.2.2 Autres exercices 46

ALGÈBRE

1 QUELQUES BASES

1.1 Expressions algébriques

a Dans les expressions

$a + b$,	a et b sont les termes de la **somme**,
$a \,.\, b$,	a et b sont les facteurs du **produit**.

b

Effectuer des produits remarquables	Factoriser des expressions (ou les transformer en produit)
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
produit de deux binômes conjugués	différence de deux carrés
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
carré d'une somme de termes	trinôme carré parfait
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
carré d'une différence de termes	trinôme carré parfait

! $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$

c On ne peut simplifier une fraction algébrique que si son **numérateur** et son **dénominateur** ont été **factorisés**.

d Pour diviser une somme de termes par un nombre, on divise **chaque** terme par ce nombre.

Pour diviser un produit de facteurs par un nombre, on divise **un seul** facteur par ce nombre.

$$\frac{a^3 + a}{a} = a^2 + 1$$

$$\frac{a^3 \,.\, a}{a} = a^3$$

1.2 Les puissances

Si $a \in \mathbb{R}_0$, $b \in \mathbb{R}_0$, $m \in \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Q}$, $a^0 = 1$, $a^1 = a$,

$a^m \,.\, a^p = a^{m+p}$	$(a^m)^p = a^{mp}$	$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$
$\dfrac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$	$a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$
$(ab)^m = a^m \,.\, b^m$		

Exercices

Exercice 1 (sans calculatrice)

Trouvez les nombres négatifs parmi:
3^7 ; $(-3)^7$; $(-3)^8$; -3^9 ; -3^2

Exercice 2 (sans calculatrice)

Calculez et exprimez les résultats en notation scientifique:
P = 1 800 × 40 000
Q = 3 000 × 0, 000 05
R = 0,000 007 × 0, 0004

S = $\dfrac{240000}{0{,}00002}$

Exercice 3 (sans calculatrice)

Donnez les résultats des calculs suivants sous la forme la plus simple:

A = $\dfrac{28 \times 10^3}{0,4 \times 10^4}$

B = $\dfrac{18 \times 10^{-4}}{3 \times 10^{-3}}$

C = $\dfrac{15 \times 10^2}{0,3 \times 10^5}$

D = $\dfrac{0,7 \times 10^5}{14 \times 10^3}$

Exercice 4

Calculez A × B et A/B dans les différents cas suivants:

1. $A = 7{,}8 \times 10^9$ et $B = 2{,}6 \times 10^6$.
2. $A = 3{,}8 \times 10^3$ et $B = 5{,}1 \times 10^{-5}$.
3. $A = 9{,}25 \times 10^{-7}$ et $B = 1{,}2 \times 10^{-2}$.

Exercice 5 (sans calculatrice)

Ecrivez les nombres sous la forme d'une seule puissance.

1. $2^4 \times 2^6$
2. $(-2)^3 \times (-2)^7$
3. $a^{11} \times a^8$
4. $\dfrac{4^4 \times 4^{12}}{4^5 \times 4^{15}}$
5. $\left(-\dfrac{3}{5}\right)^6 \times \left(-\dfrac{10}{3}\right)^6$
6. $(3^7)^3$
7. $6^4 \times (-7)^4$

Exercice 6

Montrez que:

1. $81^4 = 9^8$

2. $32^{12} = 2^{60}$

Exercice 7

Remplacez chaque symbole (*) par l'entier naturel qui convient:

$3^{25} = 3^8 \times 3^*$
$(2{,}5)^* \times (2{,}5)^3 = (2{,}5)^7$

Exercice 8

Retrouvez à droite chaque expression de gauche:

$(a^3)^2 \times a$	(a^8)
$a^{15} \times a \times a^{-6}$	(a^7)
$(a \times a^3)^2$	(a^6)
$a^{-2} \times a^{12} \times a^{-4}$	(a^{10})

Exercice 9

344 000 tonnes de pétrole brut se répandent sur la mer. En admettant que ce pétrole s'étale uniformément à la surface de l'eau et forme une couche de 10^{-4} cm d'épaisseur, quelle est l'aire en km² de la tache ainsi formée ?
(Masse volumique du pétrole : 860 kg/m³)

Exercice 10 (sans calculatrice)

Dans l'eau le son se propage à environ $1{,}5.10^3$ mètres par seconde.
Le sondeur d'un navire envoie une onde sonore. Il reçoit son écho 0,4 seconde plus tard (c'est le temps nécessaire à l'onde pour aller se réfléchir sur le fond de la mer et revenir au navire). Quelle est la profondeur de l'eau sous le navire ?

Exercice 11 (sans calculatrice)

La lumière parcourt environ 3.10^5 kilomètres par seconde. La distance du Soleil à la Terre est d'environ $1{,}5.10^8$ kilomètres. Combien de temps la lumière met-elle pour parcourir la distance du Soleil à la Terre ?

1.3 Les radicaux

a Si $a \in \mathbb{R}^+$, alors $\boxed{\sqrt{a} = b \quad \text{ssi} \quad b^2 = a.}$

En particulier, $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$;

$x^2 = 4 \iff x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$. Mais $\sqrt{4} = 2$ et non pas ± 2.

($\sqrt{\ }$ est le symbole de la racine carrée positive).

Si $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$, alors $\boxed{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}.}$

Si $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}_0^+$, alors $\boxed{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}.}$

Si $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$, alors $\boxed{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b.}$

(produit de deux binômes conjugués)

$\boxed{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 = a \pm 2\sqrt{ab} + b.}$

(carré d'un binôme)

! $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$ car $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$.

b $\boxed{\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}.}$ (si l'expression a un sens).

REMARQUE : $\sqrt[4]{(-2)^3}$ n'a pas de sens et donc $(-2)^{\frac{3}{4}}$ non plus.

<u>Exercices</u>

<u>Exercice 1</u>

Ecrivez sans radical (et sans calculatrice).

a) $\sqrt{9}$; $\sqrt{36}$; $\sqrt{1}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{0}$
b) $\sqrt{400}$; $\sqrt{1600}$; $\sqrt{10000}$; $\sqrt{8100}$
c) $\sqrt{0,01}$; $\sqrt{0,04}$; $\sqrt{0,25}$; $\sqrt{0,64}$
d) $\sqrt{\dfrac{16}{49}}$; $\sqrt{\dfrac{8}{18}}$; $\sqrt{\dfrac{2}{50}}$; $\sqrt{\dfrac{12}{147}}$

<u>Exercice 2</u>

Calculez le carré de chacun des nombres suivants.

$\sqrt{3}$; $-\sqrt{5}$; $3\sqrt{2}$; $-2\sqrt{7}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\sqrt{10}^2$

<u>Exercice 3</u>

Choisissez la(les) proposition(s) correcte(s) (A, B, C).

	A	B	C
$\sqrt{36}$ est égal à :	-6	6	n'existe pas
$-\sqrt{81}$ est égal à :	-9	9	n'existe pas
$\sqrt{-25}$ est égal à :	-5	5	n'existe pas

Exercice 4

Retrouvez l'intrus parmi les 6 écritures suivantes:

$(\sqrt{7})^2$; $(-\sqrt{7})^2$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{(-7)^2}$; $-\sqrt{(-7)^2}$; $\sqrt{7^2}$

Exercice 5

Effectuez les différents calculs proposés et donnez le résultat sous la forme la plus simple possible:

$\sqrt{8} \times \sqrt{2}$; $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$; $\sqrt{2} \times \sqrt{50}$
$\sqrt{2,5} \times \sqrt{10}$; $\sqrt{10} \times \sqrt{1000}$; $\sqrt{0,81} \times \sqrt{100}$
$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} \times \sqrt{12}$; $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{7}} \times \sqrt{63}$; $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \times \sqrt{35}$
$\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$; $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{125} \times \sqrt{5}$; $\frac{\sqrt{0,9}}{\sqrt{10}}$; $\frac{\sqrt{6,4}}{\sqrt{0,1}}$

Exercice 6

La formule permettant de connaître la vitesse théorique d'un corps lâché sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur terrestre **en négligeant les forces de frottement** dues à l'atmosphère est la suivante: $v = \sqrt{2.g.h}$

v : vitesse en m/s
g : accélération du champ de pesanteur : 9,81 m/s² pour la Terre
h : hauteur en m

a) Un homme pesant 90 kg se laisse tomber d'une altitude de 7600 m. **Si on néglige les forces de frottement**, à quelle vitesse théorique pourrait-il arriver au sol ?

b) Toujours en négligeant les forces de frottement, si la même personne pèse 70 kg, quelle serait cette vitesse finale ?

NB: si on souhaite calculer après combien de temps la personne touchera le sol (**on néglige les forces de frottement**), on peut utiliser la fonction suivante: $h(t) = -\frac{1}{2}.g.t^2 + h_0$

h_0 : hauteur à l'instant t_0 c'est-à-dire au départ.

Et si on tient compte des forces de frottement ?

Savez-vous pourquoi une personne faisant de la chute libre atteint une vitesse maximale lors de sa chute (avant l'ouverture du parachute), bien que normalement il devrait accélérer en permanence sous l'effet de la pesanteur ?

Un objet en chute libre atteint une vitesse constante dans le cas où il est soumis à une force de retenue, comme la résistance de l'air. La force de gravitation appliquée au voisinage d'un corps massif est pratiquement constante, mais la résistance de l'air augmente en même temps que la vitesse de chute de l'objet. Si le temps de chute est suffisamment long, l'objet atteindra une vitesse

pour laquelle la résistance de l'air sera égale à la force de gravité. Les deux s'annuleront et la vitesse de chute de l'objet deviendra constante jusqu'au moment où il touchera le sol. Cette vitesse correspond à la vitesse finale. Généralement, cette vitesse maximale est de l'ordre de 190 km/h mais cela dépend de la position, de la masse de la personne… Par exemple, Luke Aikins a atteint la vitesse de 193 km/h lors de son saut en chute libre du 30 juillet 2016. À très haute altitude, cette vitesse peut être beaucoup plus élevée.

Exercice 7

Parmi les différentes valeurs calculées en statistiques, l'écart-type peut s'avérer très intéressant. Pour un ensemble de valeurs, si l'écart-type est faible, cela signifie que les valeurs sont peu dispersées autour de la moyenne (série homogène) et inversement (série hétérogène).
Formule pour calculer l'écart-type (**si on prend en compte toute la population**):

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - m)^2}{n}}$$

σ : lettre grecque sigma
n : nombre de valeurs
m : moyenne
x_i : les différentes valeurs : x_1, x_2 … x_n

Voici les résultats obtenus par des étudiant(e)s lors d'une évaluation.

a) Calculez l'écart-type pour ces deux classes.
b) Quelle est la classe la plus homogène ?

CLASSE 1A		
NOM	**PRÉNOM**	**RÉSULTAT (/20)**
DUPONT	Mélissa	18
MILLARD	Pauline	10
PAULUS	Christophe	11
WIZA	Sarah	13

CLASSE 1B		
NOM	**PRÉNOM**	**RÉSULTAT (/20)**
ADAMS	Justine	18
BILLOT	Polo	16
HUART	Ania	16
SOLLET	Pierre	18

1.4 Valeur absolue

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \in \mathbb{R}^+ \\ -a & \text{si } a \in \mathbb{R}^-. \end{cases}$$

$$\text{Si } a \in \mathbb{R}, \quad \text{alors} \quad \sqrt{a^2} = |a|.$$

1.5 Division d'un polynôme par x-a

a Le **reste** de la division d'un polynôme $P(x)$ par $x - a$ égale la valeur numérique de $P(x)$ pour $x = a$ (**loi du reste**).

b $\boxed{r = P(a) = 0}$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\text{a est une racine de } P(x)}$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{(x - a) \,.\, Q(x) \text{ est une factorisation de } P(x).}$

c Le quotient $Q(x)$ se calcule par la **méthode de la division euclidienne** ou par la **règle de Horner** :

$$
\begin{array}{r|l}
4x^2 - 5x - 9 & x + 1 \\ \cline{2-2}
-\underline{4x^2 \pm 4x} & 4x - 9 \\
-9x - 9 & \\
\underline{\mp 9x \mp 9} & \\
r = 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cc|c}
 & 4 & -5 & -9 \\
\boxed{-1} & & -4 & 9 \\ \hline
 & 4 & -9 & 0 = r
\end{array}
$$

$Q(x) = 4x - 9$ $\qquad$ $4x^2 - 5x - 9 = (x + 1)(4x - 9)$

2 ÉQUATIONS

2.1 Équations du premier degré

Une équation est une égalité dans laquelle un nombre inconnu est représenté par une lettre.
Résoudre une équation, c'est trouver la valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité est vérifiée.
Une solution d'une équation est une valeur de ce nombre inconnu pour laquelle l'égalité est vérifiée.

On rassemble dans un membre *tous les termes en l'inconnue*, et dans l'autre membre, les *termes indépendants*. On isole ensuite x.

REMARQUE : $3x = 0 \iff x = 0 \quad \left(\text{et non } \frac{1}{3}\text{ , ni } -\frac{1}{3}\text{ , ni } 3\text{ , ni } -3\right).$

Exercices

Exercice 1

1. a) Quels sont les termes dans le membre de droite de cette équation :
   $2x - 4 = 4x - 3 + 2x$
   b) Quel est le membre de gauche ?

2. Soit l'équation suivante : $6x + 3y^2 = 2x^3 - 4$
   a) Combien y a-t-il d'inconnues ?
   b) Quel est le degré de l'équation ?

Exercice 2

Traduisez les phrases écrites en langage mathématiques ou retrouvez les phrases à partir des écritures mathématiques.

Langage mathématique	*Écriture mathématique*	*Résolution*
Le triple d'un nombre est 12	3x = 12	x = 4
Un nombre divisé par 5 donne 725	.	.
Les 2/5 d'un nombre sont égaux à 51/3	.	.
51 est trois fois plus grand qu'un nombre	.	.
Un nombre et 7 font 5	.	.
Un nombre auquel on enlève 5 donne 22	.	.
Le quart d'un nombre est 9	.	.
La différence entre 25 et un nombre est 18	.	.
La différence entre un nombre et 9 est 40	.	.
7 est le tiers d'un nombre	.	.

.	7x = 56	.
.	x/2 = 72	.
.	x + 12 = 725	.
.	x - 75 = 89	.
.	5x = 15/4	.

Exercice 3

Résolvez ces équations.

a) x + 3 = 6
b) x + 5 = -6
c) x + 3 = -8
d) x - 4 = 2
e) x - 8 = 10
f) x - 1 = -4

Exercice 4

Résolvez ces équations.

a) 3x = 6

b) -x = 8

c) -4x = - 5

d) $\frac{x}{3} = 5$

e) $\frac{2x}{7} = 4$

Exercice 5

Résolvez ces équations.

a) 3x - 4 = 8
b) -5x + 7 = 6
c) $\frac{x}{4} - 2 = -7$

Exercice 6

Voici une équation du PIB (produit intérieur brut).

PIB = C + G + I + X - M

- C: consommation des ménages
- G: dépenses publiques
- I: investissements privés
- X: exportations (biens et services)
- M: importations (biens et services)

Partant des valeurs suivantes:

- C: 1783 milliards d'euros
- G: 200 milliards d'euros
- I: 212 milliards d'euros
- M: 920 milliards d'euros

Pour atteindre un PIB de 2322 milliards d'euros, à combien doivent s'élever les exportations ?

Exercice 7

1. Imaginez une équation du premier degré à une inconnue ayant pour solution x = 3
2. Imaginez une équation du premier degré à une inconnue ayant pour solution t = -2

Mise en équation de problèmes

Exercice 8 - Problème de fleurs

Un fleuriste propose à ses clients d'emporter gratuitement un bouquet de cinq roses, quatre iris et six tulipes, dont le prix est 35,00 €, à condition de trouver le prix unitaire de chaque fleur.
Pour cela, il donne les renseignements suivants.

Le prix d'un iris est la moitié du prix d'une rose.
Le prix d'une tulipe est le triple du prix d'une rose.

Pour résoudre ce problème, complétez d'abord ce tableau.

Langage courant	*Langage mathématique*
Prix d'une rose	x
Prix de cinq roses	
Prix d'un iris	
Prix de quatre iris	
Prix d'une tulipe	
Prix de six tulipes	
Prix du bouquet	

Ecrivez une équation. Résolvez-la. Concluez.

Exercice 9 – Moyenne pondérée

Vous suivez une formation qui comporte 3 cours différents.

Pour calculer le résultat global obtenu dans cette formation, une moyenne pondérée est appliquée.

Le cours A compte pour 50% des points, les cours B et C pour 25% chacun.

Vous avez obtenu 68/100 pour le cours A et 56/100 pour le cours B. Combien devez-vous obtenir pour le cours C afin que la moyenne pondérée soit de 70/100 ?

Exercice 10 - Problème de moyenne

Béatrice a eu deux notes en mathématiques.
Entre les deux, elle a progressé de quatre points et sa moyenne est de 13.
Quelles sont ces deux notes ?

Exercice 11

Une entreprise occupe 320 personnes.
Sachant qu'il y a trois fois plus d'hommes que de femmes, calculez le nombre d'hommes et le nombre de femmes employés dans cette entreprise.

Exercice 12 - Problème d'argent

Lucie dépense le quart de son salaire pour son logement et les deux cinquièmes pour sa nourriture.
Il lui reste 378,00 € pour les autres dépenses.
Calculez son salaire mensuel.

Exercice 13

Résolvez les équations suivantes:

a) $x + 0{,}6 = 4{,}8$
b) $-2 + x = 5$
c) $-2x = 5$
d) $-3+x = -9$
e) $-6x = -8$
f) $4x + 5 = 0$
g) $9 - 3x = 0$
h) $4 + 2x = 10 - 4x$
i) $9x - 7 = 3 - 3x + 8$
j) $3x + 1 = 2x - 2$
k) $5x + 10 = 3x + 40$
l) $4 + 2x = 20 - 8x$
m) $2 (3x - 1) - 2x = 7x + 3$
n) $10x - 5 - 3 (2x + 5) = -20$
o) $\frac{2}{3}x + \frac{5}{6} = 0$
p) $x - 1 = \frac{1}{2}x + 2$
q) $2x - \frac{1}{4} = 5x - \frac{7}{4}$
r) $\frac{6(x-5)}{14} - \frac{2(-3x+8)}{7} - \frac{x-4}{2} = 1$

2.2 Équations du second degré

2.2.1 Définition

2.2.2 Résolution des équations du second degré

On rassemble *tous les termes dans un même membre*;
$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$,
$\rho = b^2 - 4ac$, (ρ est le **réalisant** de l'équation, il est parfois noté Δ)

- si $\underline{\rho > 0}$, alors l'équation admet 2 solutions distinctes :

$$\boxed{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\rho}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\rho}}{2a}}$$

Factorisation : $\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$;

- si $\underline{\rho = 0}$, alors l'équation admet 2 solutions égales :

$$\boxed{x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}}$$

Factorisation : $\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2}$;

- si $\underline{\rho < 0}$, alors l'équation n'admet pas de solutions.

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.}$$

Factorisation : aucune.

REMARQUES

- Si $\rho \geqslant 0$, | la **somme** des racines du trinôme du 2e degré est $-\frac{b}{a}$, le **produit** des racines est $\frac{c}{a}$.
- Deux nombres dont on connait la somme S et le produit P sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$ (si $S^2 - 4P \geqslant 0$).

2.2.3 Exercices

Exercice 1: résolvez les équations suivantes.

a) $x^2+x-2 = 0$
b) $x^2+3x+2 = 0$
c) $x^2+x+1 = 0$
d) $4x^2+4x+1 = 0$
e) $-x^2+2x-3 = 0$
f) $x^2+4x = 0$
g) $[(x-5)(x+3)]+16 = 0$
h) $[(x-5)(x+5)]+26 = 0$
i) $(x-2)^2-1 = 0$
j) $x^3+2x^2-3x = 0$

Exercice 2 (notamment produit et somme des racines)

1. Vérifiez que 2 est racine de l'équation : $x^2 + 11x - 26 = 0$
   Quelle est l'autre racine ?
2. Écrivez une équation du second degré admettant les nombres 3 et -5 pour racines.
3. Existe-t-il deux nombres ayant pour somme 9 et pour produit -70 ? Si oui, calculez-les.

Exercice 3

Plusieurs personnes se sont réunies pour fêter Noël.
Chaque personne a apporté trois cadeaux à chacune des autres personnes.
Sachant qu'au total 468 cadeaux ont été déposés près de l'arbre de Noël, combien de personnes y avait-il ?

Exercice 4

Une excursion en autocar est organisée. Le prix global de l'excursion s'élève à 1200 €. Le nombre des participants étant supérieur de « 4 » au nombre prévu chacun peut ainsi payer 10 € en moins. Quel était primitivement le nombre d'excursionnistes ?

Exercice 5

Résolvez les équations suivantes.

a) $x^2=169$
b) $x^2+4 = 20$
c) $x^2+6 = 8$
d) $5x^2+7 = 2x^2-16$
e) $11-5x^2 = 2$
f) $x^2-14 = 5x^2-50$
g) $(x^2-4x-2)(-2x^2+3x+4)=0$
h) $\frac{2x-1}{x+3} - \frac{5x-4}{5x} = 0$

2.3 Équations du type « Produit de facteurs égalé à 0 »

2.3.1 Définition

En mathématiques, une équation produit-nul est une équation dont:

- un membre est donné sous forme de produit;
- l'autre membre est égal à zéro.

On résout généralement ce type d'équation en s'appuyant sur le théorème suivant :

Théorème — Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

2.3.2 Résolution des équations du type « Produit de facteurs égalé à 0 »

On utilise la règle du produit nul et on résout les équations formées par chaque facteur égalé à 0.

$3x^3 - 12x = 0 \iff 3x(x^2-4)=0 \iff 3x(x-2)(x+2)=0 \iff x=0$ ou $x=-2$ ou $x=2$

S = { -2; 0; 2}

2.3.3 Exercices

Résolvez les équations suivantes.

a) $(2x+3)(2-x)+(x-2)(x+1)=0$

b) $5(2x-3)^2=4x-6$

c) $5(x^2-4)=(3x-6)(7x+1)$

d) $2x^2-18=(5x+15)(4x-1)$

2.4 Équations fractionnaires (l'inconnue est présente au dénominateur)

2.4.1 Définition

Nous envisageons ici les cas des équations dans lesquelles l'inconnue est présente au dénominateur.

2.4.2 Résolution des équations fractionnaires

Méthode:

- **<u>on pose les conditions d'existence</u>** (dénominateurs non nuls);
- on réduit les deux membres au même dénominateur;
- on élimine les dénominateurs en effectuant une multiplication par le dénominateur commun;
- on résout l'équation obtenue et **<u>on confronte les solutions aux conditions d'existence</u>**.

Exemple:

Soit à résoudre dans R l'équation suivante:

$$\frac{x}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$$

Conditions d'existence: $x \neq 1$

$$\frac{x}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{1}{x-1}$$

$$x = 2(x-1) + 1$$

$x = 2x - 2 + 1$

$x = 1$

Cette solution doit être rejetée étant donné les conditions d'existence.

$S = \emptyset$

2.5 Équations bicarrées

2.5.1 Définition

Une équation bicarrée est une équation de la forme:

$ax^{2n} + bx^n + c = 0$

où n est un entier plus grand que 0

Les équations suivantes sont de cette forme là :

$x^4 - 5.x^2 + 4 = 0$
$x^6 - 5.x^3 + 4 = 0$

2.5.2 Résolution des équations bicarrées

Il faut réduire les équations au second degré.

Exemple:

$x^4 – 2x^2 – 3 = 0$

Soit $t=x^2$

$t^2 – 2t – 3 = 0$

Les solutions sont t = 3 ou t = -1(à écarter)

D'où $x^2 = 3$, c'est-à-dire $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

$S = \{-\sqrt{3} ; \sqrt{3}\}$

2.6 Équations irrationnelles

2.6.1 Définition

Une équation irrationnelle est une équation dont l'inconnue apparaît sous un signe radical.

2.6.2 Résolution des équations irrationnelles

Pour éliminer les radicaux, on élève les deux membres au carré (à cet effet, il est souvent utile d'isoler le radical dans un membre).
On utilise ainsi le principe d'équivalence.

Il faut donc exprimer la condition pour que les deux membres aient le même signe.

La marche à suivre est la suivante:

- Rechercher le domaine de l'équation.
- Isoler le radical dans un membre.
- Rechercher la condition pour que **les deux membres aient le même signe**.
  (rappel: $\sqrt{a}$ désigne **le nombre positif** dont le carré est a)
- Elever les deux membres au carré.
- Si l'équation obtenue contient encore un radical, isoler celui-ci dans un membre et renouveler le procédé.
- Lorsque l'équation ne contient plus de radical, résoudre l'équation obtenue.
- Rejeter les solutions ne faisant pas partie du domaine et **celles qui ne vérifient pas les conditions**.

Exemple:

$\sqrt{x+2} = 4 - x.$ C.E. : $x + 2 \geqslant 0$ **et** $4 - x \geqslant 0 \iff x \in [-2; 4]$

En élevant les deux membres au carré : $x + 2 = 16 - 8x + x^2$ ou $x^2 - 9x + 14 = 0$,

dont les solutions sont $\frac{9+5}{2}$ ou 7 (à écarter) et $\frac{9-5}{2}$ ou 2.

Ainsi, $S = \{2\}$.

2.7 Exercices concernant les équations fractionnaires, bicarrées et irrationnelles

Résolvez les équations suivantes.

1) $x^4 - 4x^2 - 45 = 0$

2) $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$

3) $x^8 + 8x^4 - 9 = 0$

4) $x^{10} + 31x^5 - 32 = 0$

5) $\frac{x+4}{x} - \frac{1}{x+4} = \frac{4}{x^2+4x}$

6) $\frac{2+2x}{9x^2-4} - \frac{x-2}{9x^2+12x+4} = \frac{x+4}{9x^2-4}$

7) $\frac{1}{x-6} + \frac{1}{x^2-10x+24} = \frac{2}{4x-x^2}$

8) $\frac{x-2}{3(x-1)} + \frac{x-1}{4(x-2)} = \frac{x+2}{x^2-3x+2}$

9) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{35}$

10) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4} = \frac{8}{x^2-16}$

11) $\frac{x}{x-3} - \frac{1}{x+3} = \frac{6}{x^2-9}$

12) $\frac{x^2-3}{9x^2-24x+16} \cdot \frac{3x^2-4x}{x^2+2\sqrt{3}x+3} = 0$

13) $2x + \sqrt{3-5x-2x^2} = 1$

14) $\sqrt{2x^2-5x+7} = 7 + x$

15) $\sqrt{2x+9} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-4}$

16) $\sqrt{2-x} - \sqrt{1-x} = \sqrt{3-x}$

17) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$

18) $\sqrt{1+\sqrt{x^4-x^2}} = x - 1$

19) $\sqrt{36+x} - 2 = \sqrt{x}$

3 SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

3.1 Définition

Un système d'équations est un ensemble de plusieurs équations mathématiques utilisant les mêmes variables ou inconnues, une solution doit satisfaire simultanément chaque équation du système.

3.2 Résolution des systèmes d'équations

1) $\begin{cases} 2x - 8 = 0 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ 3 \,.\, 4 - 2y = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \iff S = \{(4;3)\}.$

(2) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \end{cases} \underset{\text{par substitution}}{\iff} \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x \quad = -2 - 3y \end{cases}$

$\begin{cases} 3(-2 - 3y) - 2y = 5 \\ x \quad = -2 - 3y \end{cases}$

$\begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases} \iff S = \{(1;-1)\}.$

3) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \end{cases} \left| \begin{array}{c} \\ \times(-3) \end{array} \right| \begin{array}{c} \times 3 \\ \times 2 \end{array} \Bigg|$

par combinaisons linéaires

$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -3x - 9y = 6 \end{cases} \Bigg| \begin{cases} 9x - 6y = 15 \\ 2x + 6y = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} -11y = 11 \\ 11x = 11 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

$-11y = 11 \qquad 11x = 11$

$\iff S = \{(1;-1)\}.$

3.3 Résolution de problèmes

<u>Exercice 1</u>

Un détaillant en électroménager ayant commandé des lampes de bureau pour une somme de 4375 € constate une erreur à la livraison. Le fabriquant lui a expédié des lampes valant 3,75 € de moins par unité mais leur nombre est supérieur de 15 au nombre de lampes commandées. Le détaillant conserve la livraison pour le prix convenu.

Quel était le nombre de lampes commandées et le prix d'une lampe ?

<u>Exercice 2</u>

Pour 3 baguettes de pain « épeautre » et 2 baguettes blanches, on paie 5,50 EUR.
Pour 2 baguettes de pain « épeautre » et 3 baguettes blanches, on paie 5,25 EUR.

Calculez le prix de chaque type de baguette.

ANALYSE

1 LES FONCTIONS

1.1 Introduction

1.1.1 Définitions

En mathématique comme en physique ou en informatique, le mot "fonction" traduit une dépendance entre deux grandeurs: la vitesse d'un véhicule en fonction du temps, le volume d'une boîte en fonction de ses dimensions, l'allongement d'une barre métallique en fonction de la température, …

En sciences humaines, en biologie, en chimie, ce sont souvent les tableaux de valeurs et les graphiques qui illustrent le concept de fonction.

Une **fonction** d'une variable réelle est une relation qui à tout réel fait correspondre **au plus** un réel.
On schématise souvent la fonction f de la façon suivante :

$$x \xrightarrow{f} y \text{ ou } f(x)$$

x désigne la **variable** et y ou $f(x)$ désignent **l'image**.

L'ensemble des réels qui ont une image par la fonction f s'appelle **domaine de définition** ; il est noté **dom** f.

Pour tracer le graphique d'une fonction, on porte les valeurs de la variable sur l'axe (horizontal) des x et les images sur l'axe (vertical) des y. L'équation du graphique de la fonction f est $y = f(x)$.

On appelle **racine** ou **zéro** d'une fonction un réel dont l'image par cette fonction est nulle. C'est l'abscisse du point d'intersection du graphique de la fonction avec l'axe Ox. Pour trouver les racines (zéros) d'une fonction f, on résout l'équation $f(x) = 0$.

L'image de zéro est appelée **ordonnée à l'origine**. C'est l'ordonnée du point d'intersection du graphique de la fonction avec l'axe Oy. Pour la déterminer, on calcule $f(0)$.

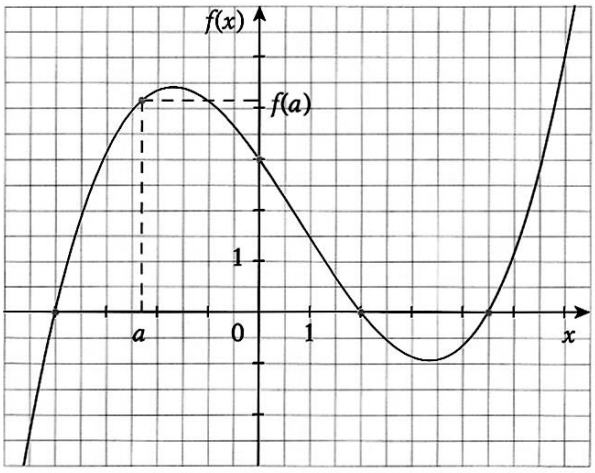


fig. 8

$(a, f(a))$ est un point du graphique.
Les racines de la fonction f sont -4 ; 2 et 4,5.
L'ordonnée à l'origine est 3.

Une fonction est **paire** lorsque l'opposé de tout réel du domaine appartient aussi au domaine et qu'ils ont tous deux la même image. Le graphique de la fonction admet alors une symétrie orthogonale d'axe Oy.

Une fonction est **impaire** lorsque l'opposé de tout réel du domaine appartient aussi au domaine et que leurs images sont opposées. Le graphique de la fonction admet alors une symétrie de centre (0 , 0).

Une fonction f est **croissante** (fig. 9) sur une partie A de son domaine lorsque la variable x et l'image $f(x)$ varient dans le même sens (l'ordre est conservé).

Quels que soient les réels x_1 et x_2 de A :

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

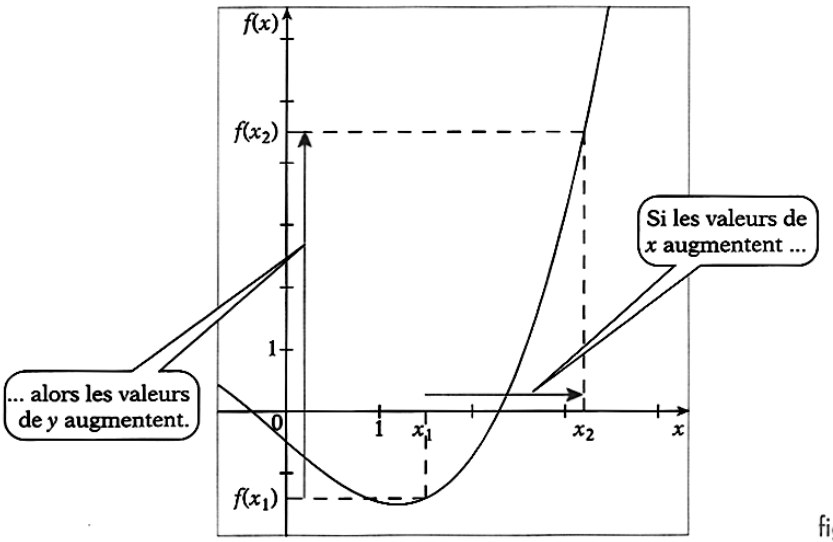


fig. 9

Une fonction f est **décroissante** (fig. 10) sur une partie A de son domaine lorsque la variable x et l'image $f(x)$ varient en sens contraire (l'ordre change).

Quels que soient les réels x_1 et x_2 de A :

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

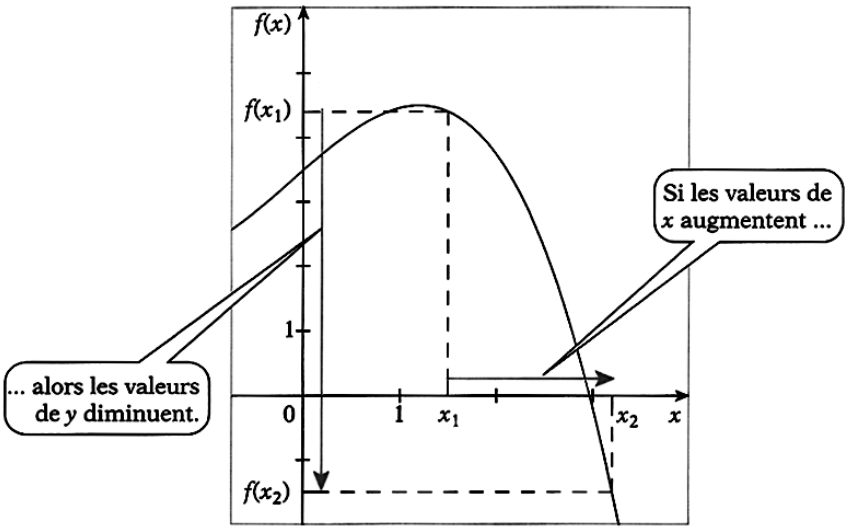


fig. 10

1.1.2 Exercices

Exercice 1

Soit un institut de formation. Le droit d'inscription se calcule de la manière suivante: un coût fixe de 30,00 EUR est compté auquel on ajoute 0,25 EUR par période de cours.

La fonction permettant de calculer le droit d'inscription est donc la suivante:

$f(x) = 30 + 0{,}25.x$

f(x) : droit d'inscription à payer
x : nombre de périodes de cours

a) Quel est le droit d'inscription pour 10, 20, 120, 800 périodes de cours ?
b) Représentez graphiquement cette fonction (0 à 800 périodes de cours). L'objectif est d'obtenir la variation du droit d'inscription en fonction du nombre de périodes de cours.

Exercice 2

Soit un institut de formation. Le droit d'inscription se calcule à l'aide de la fonction suivante:

$f(x) = 25 + 0{,}36.x + 11{,}363.x^{0{,}3565}$

f(x) : droit d'inscription à payer
x : nombre de périodes de cours

a) Quel est le droit d'inscription pour 10, 40, 120, 600 périodes de cours ?
b) À l'aide d'un tableur (Calc, Excel…), représentez graphiquement cette fonction (0 à 800 périodes de cours). L'objectif est d'obtenir la variation du droit d'inscription en fonction du nombre de périodes de cours.

Exercice 3

Au sein d'une entreprise (PME), une imprimante 3D a été achetée pour un montant de 3000,00 EUR. La valeur résiduelle est de 0,00 EUR.

L'objectif est de calculer le montant d'amortissement annuel en considérant un amortissement linéaire.

Amortissement annuel = Base amortissable * Taux

Taux = 1 / durée d'amortissement en années

Dans un tableau, reprenez le montant d'amortissement annuel pour différentes durées d'amortissement.

Nombre d'années	Montant d'amortissement annuel
4	
5	
8	

Si vous utilisez Calc ou Excel, la fonction AMORLIN() peut être utilisée.

Exercice 4

Une entreprise (répondant aux critères permettant un amortissement au prorata temporis) clôture son exercice comptable sur l'année civile. Elle a acheté un matériel industriel 15 jours avant la fin de l'exercice fiscal 2017 pour un montant de 20 000 euros. Cette immobilisation sera amortie sur une durée de 5 années selon le mode linéaire. Le taux d'amortissement linéaire est donc de 20% (1/5).

Lorsqu'une immobilisation est mise en service en cours d'année, la première annuité doit être réduite au prorata temporis afin de ne prendre en compte que la période écoulée entre la date de mise en service et la date de clôture de l'exercice. Le prorata temporis se calcule en jour et sur une durée de 365 jours (366 si année bissextile, avec certaines méthodes, on considère 360 jours) pour un exercice de 12 mois.

NB: Prorata temporis est une expression latine signifiant en proportion du temps écoulé.

Date de début	Date de fin	Calcul de l'amortissement	Montant de l'amortissement
16/12/2017	31/12/2017	20000 x 15/365 x 20%	164,38 EUR
01/01/2018	31/12/2018	20000 x 20%	4000,00 EUR
01/01/2019	31/12/2019	20000 x 20%	4000,00 EUR
01/01/2020	31/12/2020	20000 x 20%	4000,00 EUR
01/01/2021	31/12/2021	20000 x 20%	4000,00 EUR
01/01/2022	15/12/2022	20000 x 350/365 x 20%	3835,62 EUR
TOTAL			20000,00 EUR

Si vous utilisez Calc ou Excel, la fonction AMORLINC() peut être utilisée.
NB: Excel ne comptabilise pas le premier jour.

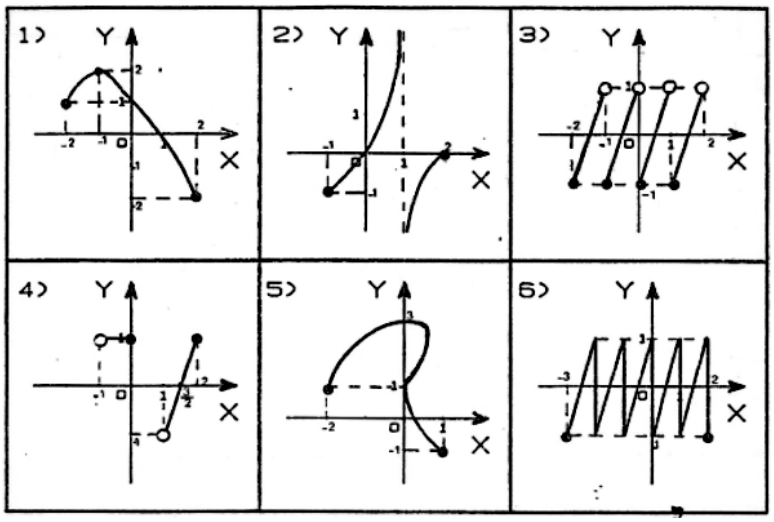
	A	B	C
1			
2	**Montant d'achat:**	20.000,00 €	
3	**Valeur résiduelle:**	0,00 €	
4	**Date d'achat:**	16/12/2017	
5	**Fin de la première période:**	31/12/2017	
6	**Taux:**	20%	
7			
8			
9			
10	**Année**	**Période**	**Montant de l'amortissement**
11	2017	0	164,38 €
12	2018	1	4.000,00 €
13	2019	2	4.000,00 €
14	2020	3	4.000,00 €
15	2021	4	4.000,00 €
16	2022	5	3.835,62 €
17			20.000,00 €

Aperçu des formules:

10	Année	Période	Montant de l'amortissement
11	2017	0	=AMORLINC(B2;B4;B5;B3;B11;B6;1)
12	2018	1	=AMORLINC(B2;B4;B5;B3;B12;B6;1)
13	2019	2	=AMORLINC(B2;B4;B5;B3;B13;B6;1)
14	2020	3	=AMORLINC(B2;B4;B5;B3;B14;B6;1)
15	2021	4	=AMORLINC(B2;B4;B5;B3;B15;B6;1)
16	2022	5	=AMORLINC(B2;B4;B5;B3;B16;B6;1)
17			=SOMME(C11:C16)

Exercice 5

Quels sont parmi les graphes cartésiens dessinés ci-après, ceux de fonctions numériques d'une variable réelle ?



Exercice 6

Les fonctions f et g suivantes sont-elles égales ?

1. $f(x) = x^2 + 4x + 4$ et $g(x) = (x+2)^2$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{3(x-2)}$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{3}$
3. $f(x) = \dfrac{x-1}{2x-5}$ et $g(x) = \dfrac{1-x}{5-2x}$

Exercice 7

Etudiez la parité des fonctions suivantes:

1. $D_f = \mathbb{R}$ et $f(x) = 3x$
2. $D_f = \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2+1}$
3. $D_f = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2 - x$
4. $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1;0;1\}$ et $f(x) = \dfrac{-4}{x^3 - x}$

Exercice 8

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, représentez graphiquement les fonctions f suivantes; indiquez pour chacune d'elles (par lecture graphique) l'ensemble des solutions de l'équation f(x) = 0 (S1) et de l'inéquation f(x) > 0 (S2).

1. $f(x) = 3x + 2$ 2. $f(x) = 1 - x$
3. $f(x) = x^2 - 1$ 4. $f(x) = \dfrac{2}{2-x}$

Exercice 9

Etudiez les variations suivantes.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + 2$.
Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$.
Montrer que f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et que f est croissante sur $[0; +\infty[$

1.2 Déterminer le domaine de définition d'une fonction à partir de son graphique

1.2.1 Présentation

Le domaine de définition d'une fonction est déterminé à partir du graphique ou à partir des conditions d'existence de la fonction lorsqu'on connaît son expression.
Pour déterminer le domaine d'une fonction à partir de son graphique, il faut repérer sur l'axe Ox les réels qui ont une image. C'est la projection orthogonale du graphique de la fonction sur l'axe Ox.

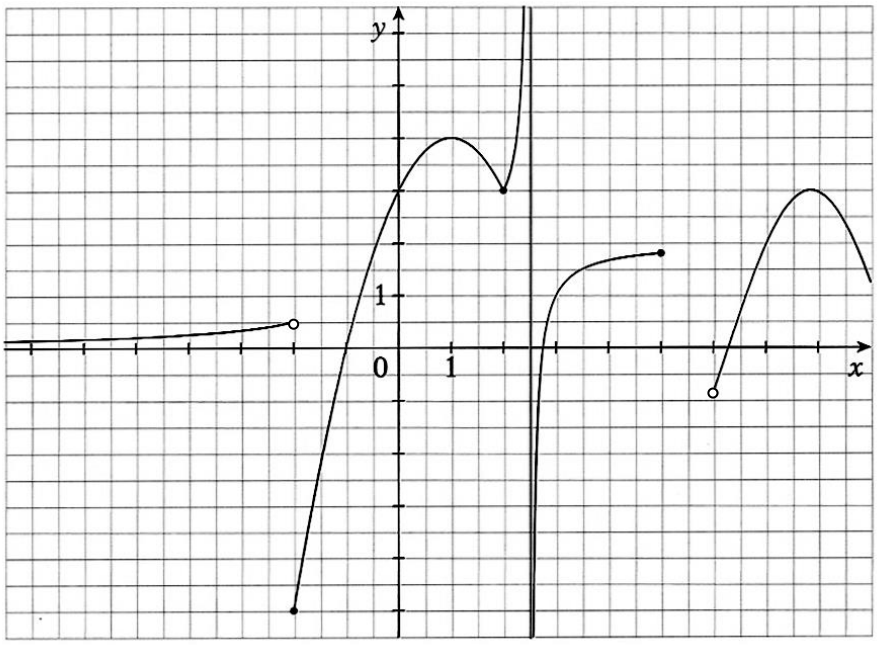


fig. 11

On constate sur la fig. 11 que les réels qui ont un image sont :

	Inégalité(s) correspondante(s)	Intervalle du domaine
les réels strictement inférieurs à $\frac{5}{2}$	$x < \frac{5}{2}$	$\left]-\infty, \frac{5}{2}\right[$
les réels strictement supérieurs à $\frac{5}{2}$ et inférieurs à 5	$\frac{5}{2} < x \leq 5$	$\left]\frac{5}{2}, 5\right]$
les réels strictement supérieurs à 6	$x > 6$	$]6, +\infty[$

Le domaine de la fonction est la réunion des intervalles.
On a : $\text{dom} f = \left]-\infty, \frac{5}{2}\right[\cup \left]\frac{5}{2}, 5\right] \cup]6, +\infty[$.

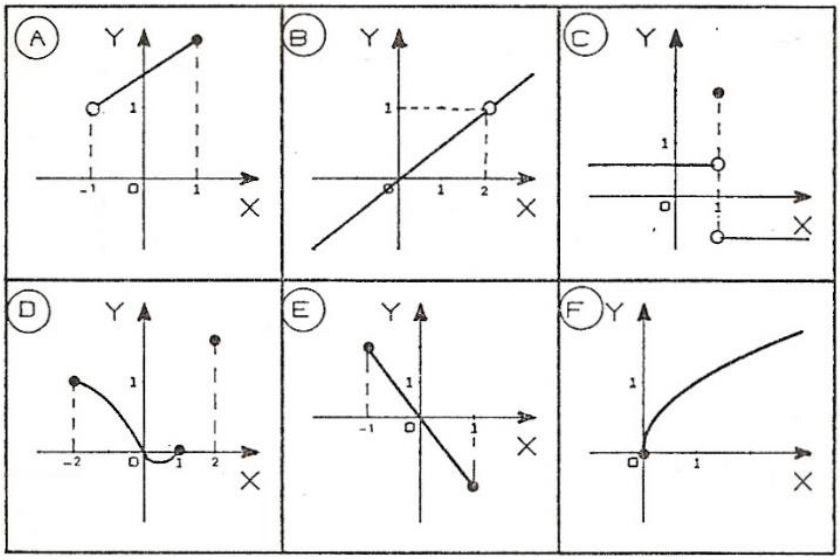
1.2.2 Exercices

Exercice 1

Voici les graphes de six fonctions notées de A à F. Voici quelques domaines:

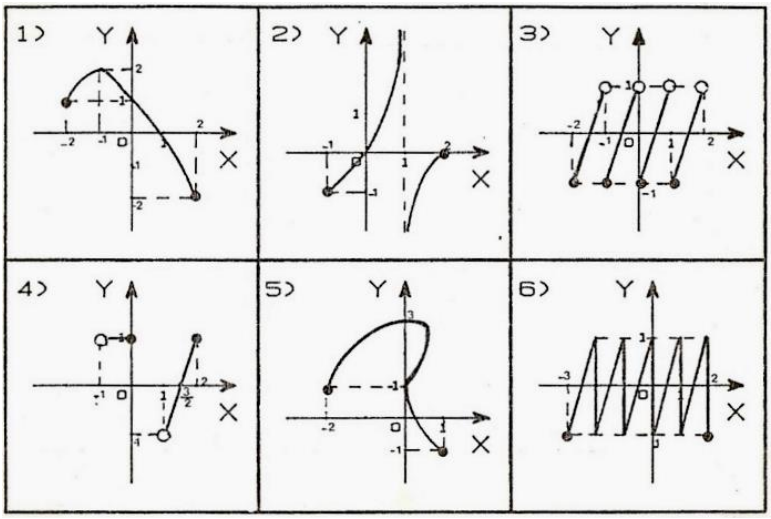
1)] -1, 1]
2) [-2,1] \ {2}
3) R \ {2}
4)]-1,1[
5) [-1,1]
6) R_0
7) R
8) [-2,1] ∪ {2}
9) R^+

Donnez à chaque fonction le domaine qui lui convient:



Exercice 2

Parmi les graphes cartésiens suivants, lorsqu'il s'agit de graphes de fonctions numériques, précisez le domaine de la fonction, l'ensemble des images et les éventuelles racines.



1.3 Déterminer le domaine de définition d'une fonction à partir de son expression analytique

1.3.1 Présentation

Le domaine est déterminé à partir des **conditions d'existence** de la fonction.

a. La fonction est un polynôme. Son domaine est $\mathbb{R}$.

b. La fonction est de la forme $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Il faut imposer au dénominateur d'être non nul.

La condition d'existence (notée CE) est $g(x) \neq 0$.

Exemples

1) Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ CE : $x \neq 0$

Le domaine de cette fonction est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (tous les réels sauf 0), il est aussi noté $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

2) Soit $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-4}$ CE : $x^2 - 4 \neq 0$

La fonction n'est pas définie pour $x = 2$ et $x = -2$; dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

c. L'expression de la fonction contient un radical d'indice pair. Le radicand doit être positif.

Exemple

Soit $f(x) = \sqrt{2x+3}$ CE : $2x + 3 \geq 0$, càd $x \geq -\dfrac{3}{2}$.

La fonction est définie pour tout réel supérieur à $-\dfrac{3}{2}$; dom $f = \left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$.

1.3.2 Exercices

Déterminez le domaine de définition des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{2}$	2. $f(x) = \dfrac{2}{x^2-4}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-14x+49}$	4. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{2-x}}$

1.4 Comment comparer des fonctions à partir de leurs graphiques ?

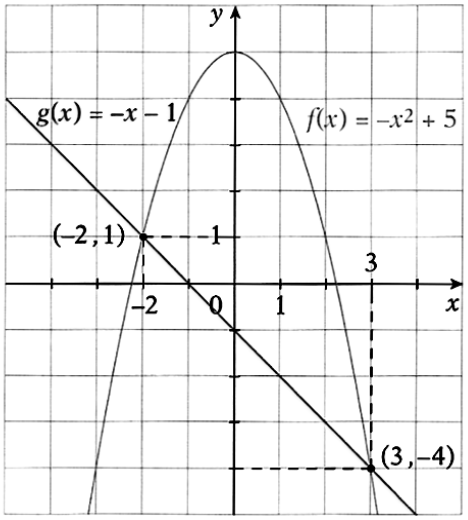
Comparer les fonctions f et g, c'est résoudre une équation ou une inéquation de la forme $f(x) = g(x)$, $f(x) \leq g(x)$ ou $f(x) < g(x)$.

a. Pour résoudre l'équation $f(x) = g(x)$, il faut déterminer tous les réels qui ont la même image par les deux fonctions.

Exemple : résoudre $-x^2 + 5 = -x - 1$

Graphiquement, on observe que les points $(-2,1)$ et $(3,-4)$ sont communs aux deux graphiques. Leurs abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

Algébriquement, on résout l'équation $-x^2 + 5 = -x - 1$ ou $x^2 - x - 6 = 0$, dont les solutions sont $x = -2$ et $x = 3$. Les fonctions f et g sont égales pour $x = -2$ ou $x = 3$.



b. Pour résoudre l'inéquation $f(x) \leq g(x)$, il faut déterminer les réels dont l'image par f est inférieure à l'image par g.

En particulier, pour résoudre $f(x) \leq 0$ (ou $f(x) \geq 0$), on cherche les réels dont l'image est située en dessous ou sur l'axe Ox (au-dessus ou sur l'axe Ox).

Exemple : résoudre $x^2 - 5 \leq x + 1$

Graphiquement, on observe qu'entre les abscisses -2 et 3, les points du graphique de f sont situés en dessous ou sur les points de même abscisse du graphique de g. Tous les réels de l'intervalle $[-2,3]$ vérifient l'inéquation.

Algébriquement, on résout l'inéquation $x^2 - 5 \leq x + 1$ ou $x^2 - x - 6 \leq 0$, dont l'ensemble des solutions est l'intervalle $[-2,3]$, comme on peut le vérifier sur le tableau de signe ci-dessous.

x		-2		3	
$x^2 - x - 6$	+	0	−	0	+

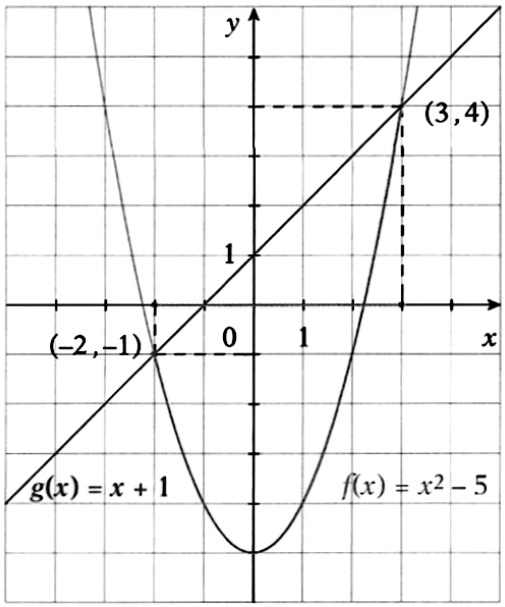


fig. 13

c. Pour résoudre $f(x) < g(x)$, on cherche les réels dont l'image par f est strictement inférieure à l'image par g.

Exemple : résoudre $x^2 - 3 < \sqrt{x+3}$

On observe sur les graphiques qu'entre les abscisses -2 et approximativement 2,3, les points du graphique de f sont situés en dessous des points de même abscisse du graphique de g. Tous les réels de l'intervalle $]-2\,;2{,}3[$ vérifient l'inéquation.

Certaines équations ou inéquations ne peuvent être résolues par les outils algébriques dont on dispose. Traduire ces équations ou inéquations en relations entre deux fonctions qu'on représente graphiquement permet d'approcher les solutions. On peut affiner la solution en remplaçant les approximations successives de la valeur estimée dans l'équation (inéquation) donnée.

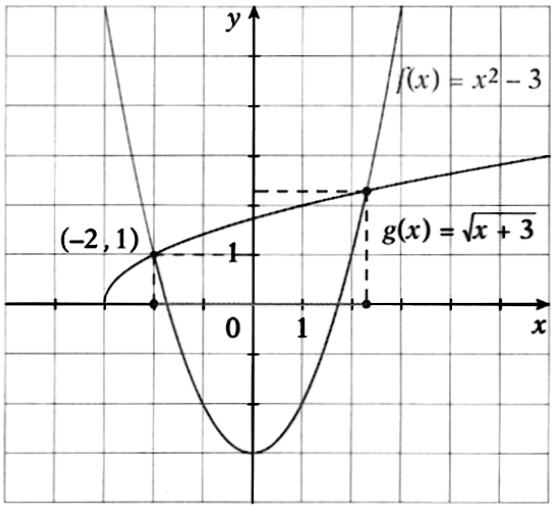


fig. 14

1.5 Comment associer une modification de l'expression analytique à une transformation graphique ?

Le tableau ci-dessous précise les transformations du graphique et des coordonnées associées aux modifications de l'expression d'une fonction.

Si $f(x)$ devient...	alors le graphique de $f(x)$ subit une...	et (x, y) devient
$f(x+k)$	translation horizontale de vecteur $(-k, 0)$ fig. 15	$(x-k, y)$
$f(x)+k$	translation verticale de vecteur $(0, k)$ fig. 16	$(x, y+k)$
$f(-x)$	symétrie orthogonale d'axe Oy fig. 17	$(-x, y)$
$-f(x)$	symétrie orthogonale d'axe Ox fig. 18	$(x, -y)$
$f(k \cdot x)$	compression $(\lvert k \rvert > 1)$ ou étirement $(0 < \lvert k \rvert < 1)$ horizontal de facteur k fig. 19	$\left(\frac{x}{k}, y\right)$
$k \cdot f(x)$	compression $(0 < \lvert k \rvert < 1)$ ou étirement $(\lvert k \rvert > 1)$ vertical de facteur k fig. 20	$(x, k \cdot y)$

Exemples

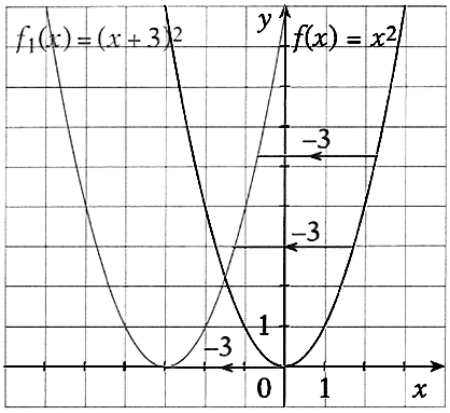


fig. 15

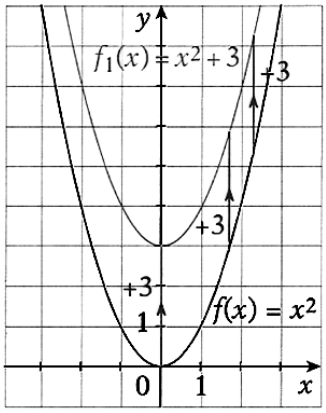


fig. 16

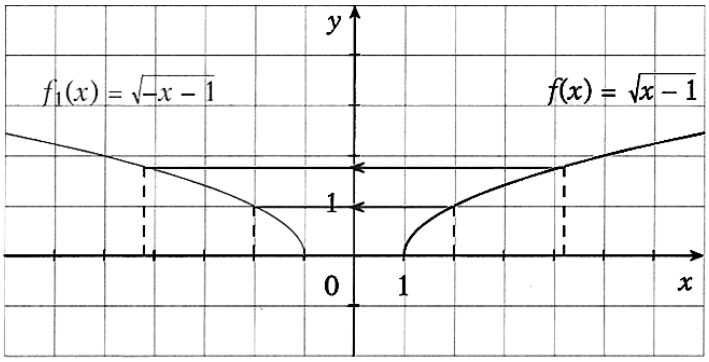


fig. 17

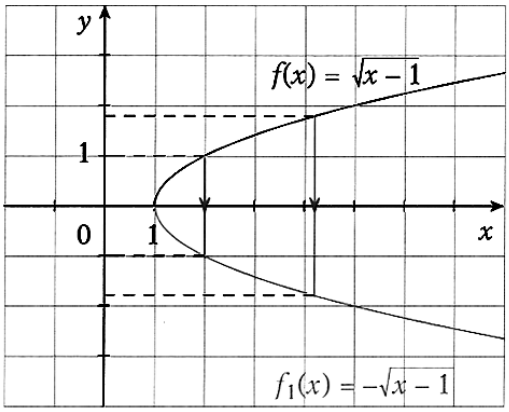


fig. 18

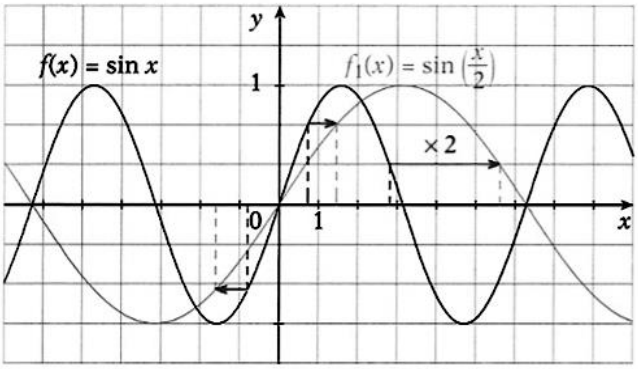


fig. 19

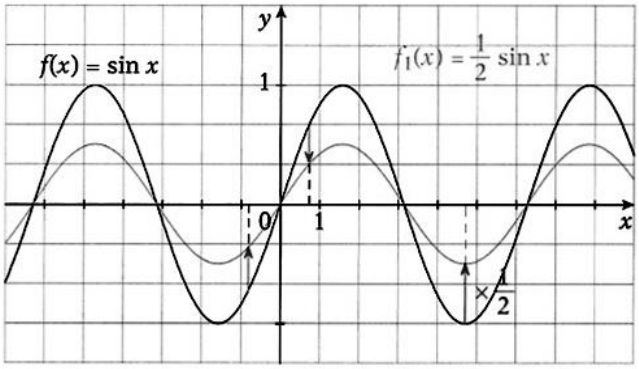


fig. 20

1.6 Comment additionner, multiplier ou diviser deux fonctions ?

Soit les fonctions f et g définies par $y = f(x)$ et $y = g(x)$.

a. La **somme** des fonctions f et g est la fonction $f + g$ définie par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
La fonction $f + g$ est définie là où les fonctions f et g sont toutes deux définies.

Son graphique (fig. 21) s'obtient à partir des graphiques des fonctions f et g en additionnant les ordonnées des points de même abscisse.

b. Le **produit** des fonctions f et g est la fonction $f \cdot g$ définie par $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

La fonction $f \cdot g$ est définie là où les fonctions f et g sont toutes deux définies.

Son graphique s'obtient à partir des graphiques des fonctions f et g en multipliant les ordonnées des points de même abscisse.

c. Le **quotient** des fonctions f et g est la fonction $\frac{f}{g}$ définie par $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

La fonction $\frac{f}{g}$ est définie là où les fonctions f et g sont toutes deux définies, pour autant que $g(x)$ soit non nul.

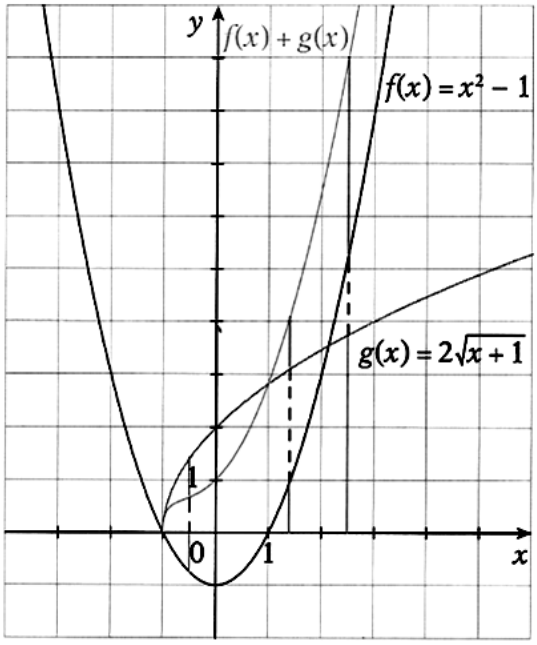


fig. 21

1.7 Qu'est-ce qu'une fonction homographique ?

Une fonction **homographique** est une fonction de la forme $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0)$.

En effectuant la division euclidienne de $ax+b$ par $cx+d$, son expression peut se mettre sous la forme $f(x)=\dfrac{n}{x+p}+q$. Son graphique s'obtient par transformation du graphique de la fonction $\dfrac{1}{x}$. C'est une hyperbole admettant une asymptote verticale d'équation $x=-p$ et une asymptote horizontale d'équation $y=q$.

Exemple

Soit la fonction $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-1}$.

$$\begin{array}{r|l} 2x+3 & x-1 \\ \cline{2-2} -(2x-2) & 2 \\ \cline{1-1} 5 & \end{array}$$

On effectue la division euclidienne, ce qui permet d'écrire la fonction sous la forme $f(x)=2+\dfrac{5}{x-1}$.

Pour tracer le graphique de cette fonction à partir de celui de $\dfrac{1}{x}$, on procède par étapes successives décrites ci-après.

a. Tracer le graphique de $\dfrac{1}{x}$ (fig. 22).

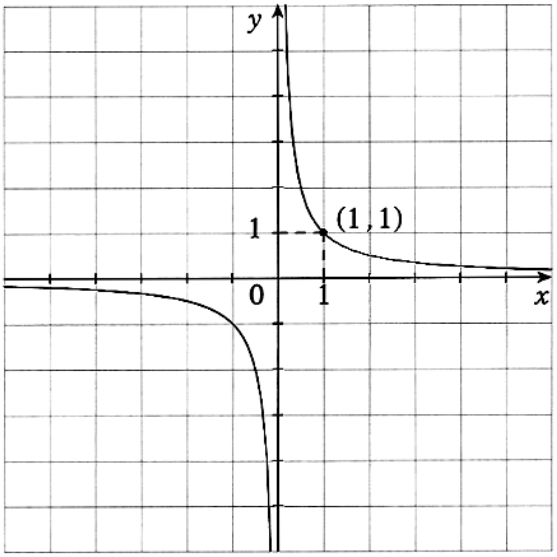


fig. 22

Translation horizontale de 1 unité vers la droite ou de vecteur (1 , 0).

b. On obtient le graphique de $\dfrac{1}{x-1}$ (fig. 23).

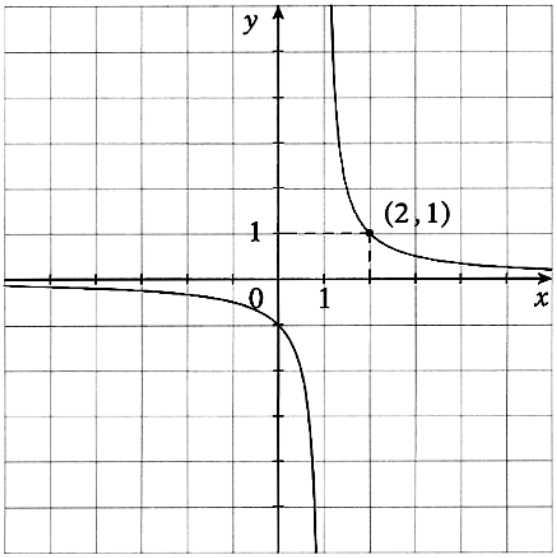


fig. 23

Étirement vertical de facteur 5 (les ordonnées sont multipliées par 5).

c. On obtient le graphique de $\frac{5}{x-1}$

(fig. 24).

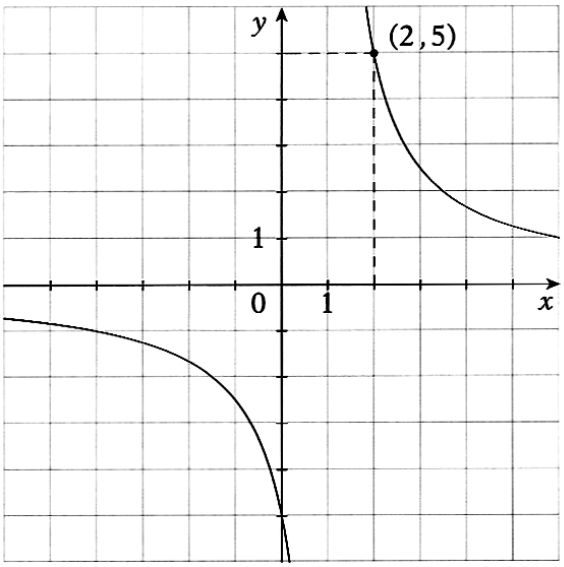


fig. 24

Translation verticale de 2 unités vers le haut ou de vecteur (0 , 2).

d. On obtient le graphique de $\frac{5}{x-1}+2$

(fig. 25).

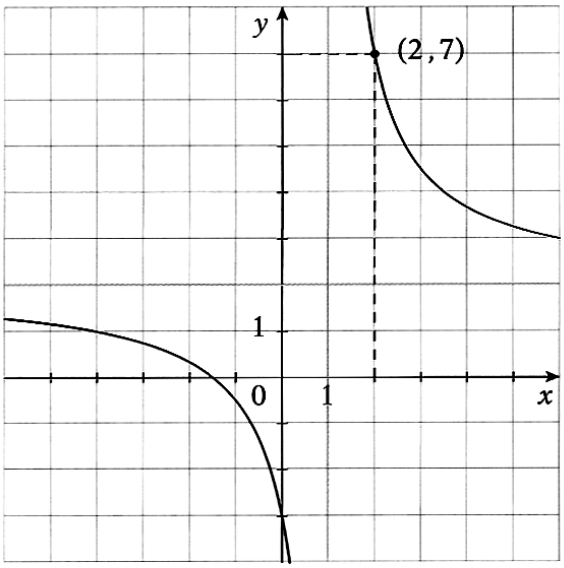


fig. 25

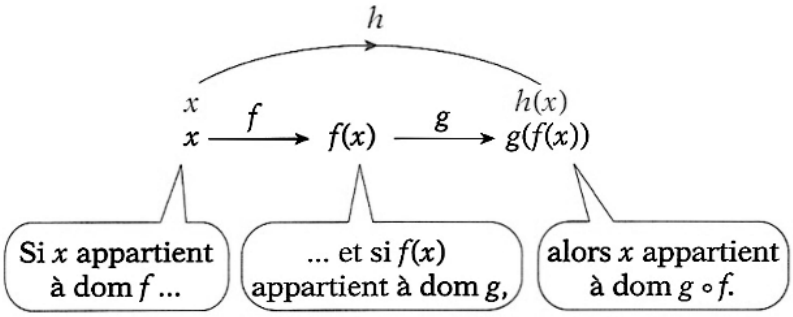
Le graphique de la fonction $f(x)=2+\frac{5}{x-1}$ est une hyperbole.

Elle a deux asymptotes : une horizontale $AH \equiv y=2$ et une verticale $AV \equiv x=1$.

1.8 Comment composer des fonctions ?

Soit les fonctions $f : x \to f(x)$ et $g : x \to g(x)$.
La **composée** des fonctions f et g est la fonction h définie par $h(x) = g(f(x))$.

Cette fonction est notée $g \circ f$ et lue « g après f ».



À partir de deux fonctions données, on peut généralement construire deux fonctions composées, $f \circ g$ et $g \circ f$. Ces deux fonctions ne sont pas égales et peuvent avoir des domaines différents.

Exemples

a. Soit $f : x \to f(x) = 3x - 1$ et $g : x \to \sqrt{x}$.

La fonction « g après f » est la fonction $g \circ f : x \to g(f(x)) = \sqrt{3x-1}$.

En effet, $g(f(x)) = g(3x-1) = \sqrt{3x-1}$.

Elle est définie pour $x \geq \frac{1}{3}$, donc $\operatorname{dom} g \circ f = \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

La fonction « f après g » est la fonction $f \circ g : x \to f(g(x)) = 3\sqrt{x} - 1$.

En effet, $f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 3\sqrt{x} - 1$. Son domaine est $\mathbb{R}^+$.

b. Soit $f : x \to f(x) = x^2$ et $g : x \to \sqrt{x}$.

La fonction « g après f » est la fonction $g \circ f : x \to g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$.

En effet, $g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$.
Elle est définie pour tout réel, donc $\operatorname{dom} g \circ f = \mathbb{R}$.

La fonction « f après g » est la fonction $f \circ g : x \to f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$.

En effet, $f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$. Son domaine est $\mathbb{R}^+$.

1.9 Comment décomposer une fonction ?

Comment déterminer, à partir d'une fonction $y = f(x)$ donnée, des fonctions h et g telles que $f = h \circ g$?

$$x \xrightarrow{\quad f \quad} f(x)$$

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{h} h(g(x))$$

Il y a généralement plusieurs façons de décomposer une fonction donnée, mais on veille à la décomposer en fonctions usuelles.

Il faut parfois plus de deux fonctions pour décomposer une fonction donnée en fonctions usuelles.

Exemple

Soit la fonction $f(x) = \sin^2(3x-1)$.
Pour calculer la valeur de cette fonction en un réel, on procède par étapes successives :

$$x \xrightarrow{g} 3x-1 \xrightarrow{h} \sin(3x-1) \xrightarrow{i} \sin^2(3x-1)$$

Ainsi, pour $x = 1{,}2$, on a

$$1{,}2 \longrightarrow 3 \cdot 1{,}2 - 1 = 2{,}6 \longrightarrow \sin 2{,}6 \simeq 0{,}516 \longrightarrow 0{,}516^2 \simeq 0{,}266$$

La fonction g est définie par $g(x) = 3x - 1$.

La fonction h donne le sinus d'un réel, donc $h(x) = \sin x$.

La fonction i élève un réel au carré, donc $i(x) = x^2$.

On peut donc écrire $f(x) = i\big(h(g(x))\big)$ ou $f = i \circ h \circ g$.

2 LIMITES ET ASYMPTOTES

2.1 Introduction

On a tous une idée intuitive de ce que signifie « atteindre une limite » : se rapprocher de plus en plus d'un moment de rendez-vous, s'approcher de plus en plus d'un record de vitesse, observer une flèche qui se rapproche de plus en plus d'un but en comptant indéfiniment le nombre de points qu'elle franchit, ...

Si on s'intéresse aux suites numériques, on peut constater que les résultats obtenus en augmentant indéfiniment le nombre de termes des suites sont assez variés:
- une suite arithmétique tend vers « plus l'infini» ou «moins l'infini »,
- une suite géométrique tend vers zéro ou vers l'infini,
- le « nombre d'or » est associé à la suite de Fibonacci...

De plus, dans certains cas, les résultats mathématiques ne confirment pas l'intuition première.

Dans ce chapitre, on précise la signification de « tendre vers » dans le cadre de l'étude des fonctions. On étudie certaines fonctions et analyse leur comportement lorsque x tend vers l'infini ou lorsque y tend vers l'infini par exemple, mais d'autres limites sont intéressantes à calculer.

2.2 Théorie

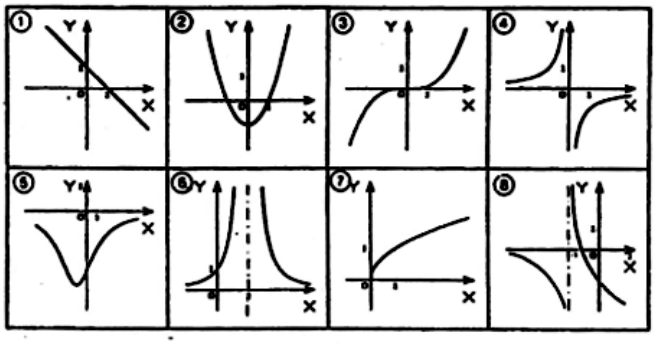
Un chapitre est consacré à l'étude des limites dans le syllabus de théorie à partir de la page 38.
<u>Un résumé figure à la page 58 de ce même syllabus</u>.

Limites en un réel *a*	Limites en l'infini	
<u>Cas des asymptotes verticales</u> $\lim_{x\to a} f(x)$ 1°cas: f(x) est continue en a $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ 2°cas: $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ • Si $D(a) \neq 0,$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = \frac{N(a)}{D(a)}$ • Si $D(a) = 0$ *et* $N(a) \neq 0,$ Alors la limite tend vers + ∞ ou - ∞. Il faut alors réaliser une étude de signe et éventuellement distinguer la limite à gauche et à droite. • $D(a) = 0$ *et* $N(a) = 0,$ Alors il faut factoriser, simplifier puis recalculer la limite en distinguant éventuellement la limite à gauche et à droite.	<u>Cas des asymptotes horizontales</u> $\lim_{x\to\infty} f(x)$ Quelques principes: • La limite d'une somme ou d'une différence est égale à la somme ou à la différence des limites (idem pour produit et quotient). • La limite en +∞ ou -∞ d'un polynôme est égale à la limite en +∞ ou -∞ de son terme en x de plus haute puissance. • Pour déterminer, la limite en +∞ ou -∞ d'un quotient, il faut comparer le degré du numérateur et celui du dénominateur.	<u>Cas des asymptotes obliques</u> • Soit la fonction a la forme $rx + s + \frac{k}{mx+p}$ $A.O. \equiv y = rx + s$ • Soit la fonction est du type $\frac{ax^2+bx+c}{mx+p}$ Il faut alors effectuer la division. Si le reste de la division est nul, alors Gf n'admet pas d'asymptote oblique. Si le reste de la division est non nul, alors f(x) s'écrit $rx + s + \frac{k}{mx+p}$ (voir le cas précédent)

2.3 Exercices

Exercice 1

Associez à chaque graphe cartésien, les renseignements qui lui correspondent.

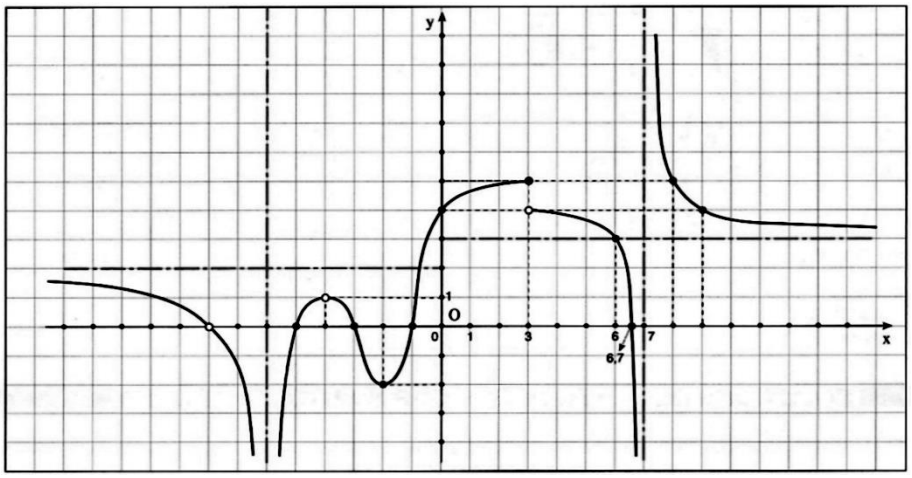


Renseignements

1)	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$
2)	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
3)	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$
4)	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
5)	$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ n'existe pas et $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$
6)	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
7)	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
8)	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

Exercice 2

Voici le graphe cartésien d'une fonction f(x)



a) Quel est le domaine de f ?

b) En quels réels est-elle définie et discontinue ?

c) Quelles sont les racines de f ?

d) Complétez le tableau suivant:

a	$\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$	$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$	$\lim\limits_{x \to a} f(x)$
-8			
-6			
-4			
-2			
-1			
0			
3			
7			

e) Ecrivez les équations des asymptotes verticales.

<u>Exercice 3: calculez l'éventuelle limite en *a* des fonctions suivantes.</u>

1) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

2) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

3) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x + 1}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{x + 1}$

5) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{1 - 2x}{x + 2}$

<u>Exercice 4: calculez les limites suivantes.</u>

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 + x^2 - x$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} -5x^3 + x^2$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left| x^3 + 2 \right|$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x + 1 - \frac{1}{1 - 2x})$

<u>Exercice 5: déterminez l'éventuelle asymptote oblique au graphe cartésien des fonctions suivantes.</u>

1) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 1}$

2) $f(x) = \frac{7x^2 - 4x + 7}{5x^2 - 1}$

3) $f(x) = 21x - 5 - \frac{7}{x + 1}$

4) $f(x) = \frac{1 - 7x + 5x^3}{7x^3 - 4x + 9}$

Exercice 6: déterminez les asymptotes pour les fonctions suivantes.

1) $f(x) = 3 - \dfrac{4}{1-x} - x$

2) $f(x) = 3x + \dfrac{1}{x}$

3) $f(x) = \dfrac{4x^2 - x + 1}{1 - 2x}$

Exercice 7

Calculez $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

Si cela s'avère utile, calculez les limites de f(x) à gauche et à droite de a.

Interprétez graphiquement le résultat.

	f(x) =	a =
1)	π	-2
2)	$\sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}}$	1
3)	$\dfrac{x-2}{2x^2-5x+2}$	2
4)	$\begin{cases} 2-x, & \text{si } x < -1 \\ 2, & \text{si } x = -1 \\ 2+x, & \text{si } x > -1 \end{cases}$	-1

Exercice 8

Le tarif postal pour l'envoi des lettres en service intérieur est donné dans le tableau suivant:

SERVICE INTERIEUR	
LETTRES	
ENVOIS NON NORMALISES	
jusqu'à 50 g.	0,79 €
de plus de 50 g. à 100 g.	0,98 €
de plus de 100 g. à 350 g.	1,47 €

a) Représentez graphiquement la fonction P donnant le prix d'envoi non normalisé d'après la masse m de la lettre envoyée.

b) Calculez $\lim\limits_{m \to a} P(m)$

lorsque a = 258, a = 101

c) Calculez

$\lim\limits_{m \to 50^-} P(m)$

$\lim\limits_{m \to 50^+} P(m)$

$\lim\limits_{m \to 50} P(m)$

d) Calculez $\lim\limits_{m \to 100} P(m)$

3 DÉRIVÉES

3.1 Introduction

Tracer le graphique d'une fonction du second degré, rechercher son maximum ou son minimum, déterminer ses intervalles de croissance ou de décroissance ne posent guère de difficultés dès qu'on connaît les caractéristiques de cette fonction. Il en va autrement pour des fonctions polynômes d'un degré supérieur ou pour des fonctions dont l'expression est plus élaborée.

La notion de dérivée découverte dans ce chapitre permet d'étudier de nombreuses fonctions sous différents aspects: croissance, extrema, représentation graphique, ...

Les domaines d'application de la dérivée sont nombreux. On peut citer, entre autres, les sciences (étude des mouvements en physique, de la vitesse de réaction en chimie, ...), l'économie (tendance des marchés et variation des coûts, ...), le monde technique (conception de ponts, raccordement de courbes, ...).

Historiquement, le concept de dérivée a été inventé au XVIIe siècle quasi simultanément par deux mathématiciens: l'Anglais NEWTON et l'Allemand LEIBNIZ.

3.2 Théorie

Un chapitre est consacré à l'étude des dérivées dans le syllabus de théorie à partir de la page 60. Un résumé figure à la page 77 de ce même syllabus (*formules importantes*).

$f(x)$	$f'(x)$
$\forall\, k \in R \quad f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$\forall\, k \in R \quad f(x) = k.x$	$f'(x) = k$
$\forall\, n \in Q \quad f(x) = x^n$	$f'(x) = n.x^{n-1}$
$\forall\, k \in R \quad f(x) = k.x^n$	$f'(x) = k.n.x^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)$
$\big(f(x).g(x)\big)' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
$\forall\, k \in R \quad \big(k.f(x)\big)' = k.f'(x)$
$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$
$\forall\, n \in Q \quad \big(f^n(x)\big)' = n.f^{n-1}(x).f'(x)$

3.3 Exercices

Exercice 1: calculez la dérivée de la fonction f, lorsque f(x) égale:

1) x^7

2) $x^3 - 3x^2 - 4x + 1$

3) $\frac{x^4}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$

4) $\sqrt{2} + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$

5) $\sqrt{x^3} - \frac{4}{x^2}$.

Exercice 2: calculez le nombre dérivé de f en le réel *a*

	f(x) =	a =
1)	$(2x-1)(4-x)$	-1
2)	$7(3x^2-x+1)-2(x^2-4x)$	1
3)	$\dfrac{4x^2-5x+1}{3}$	2
4)	$\dfrac{4x-1}{x^2-9}$	0
5)	$\dfrac{2}{4x^2-5x+1}$	1

Exercice 3: calculez f'(x) si f(x) égale:

1) $(2x-1)^3$

2) $\left(\dfrac{1}{x}-3x\right)^2$

3) $(1-2x)^2(3x+1)$

4) $\dfrac{(3x-1)^2}{2x}$.

Exercice 4: calculez sans garder d'exposants fractionnaires ou négatifs dans la réponse

1) $\left(5x-\sqrt{9-x^2}\right)'$

2) $\left(\sqrt[3]{3u^2+u+1}\right)'$

3) $\left[(2t-1)\sqrt{1-4t}\right]'$

4) $\left(\dfrac{\sqrt{2y-1}}{1-y}\right)'$

5) $\left(\sqrt{\dfrac{2y-1}{1-y}}\right)'$.

Exercice 5: en quel(s) réel(s) les fonctions suivantes sont-elles continues mais non dérivables ?

1) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$

2) $g(y)=\sqrt{2y}$

3) $h(z)=\sqrt{1-z}$

4) $i(x)=\sqrt{\sin 2x}$.

Exercice 6

Calculez le coefficient angulaire de la tangente à la courbe d'équation donnée au pont d'abscisse *a*:

1) $y=4x^3-\dfrac{x}{2}+1$, $a=-1$;

2) $y=\dfrac{1}{3x-1}$, $a=\dfrac{1}{3}$;

3) $y=\left(\dfrac{1}{x}-3\right)(x^2-1)$, $a=1$;

4) $y=\sqrt{2x-4}$, $a=3$;

Exercice 7

Donnez une équation cartésienne de la tangente à la courbe d'équation donnée au point d'abscisse *a*:

1) $y = x^2 - x - 1$, $a = 2$;

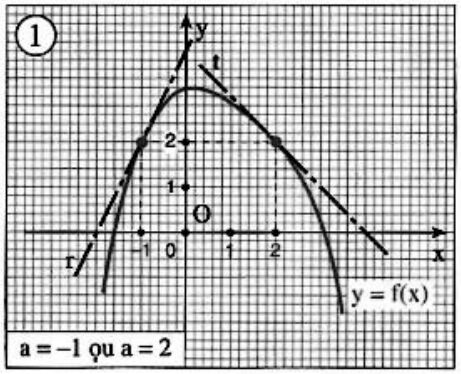
2) $y = \dfrac{3x(1-x)}{2-x}$, $a = -1$;

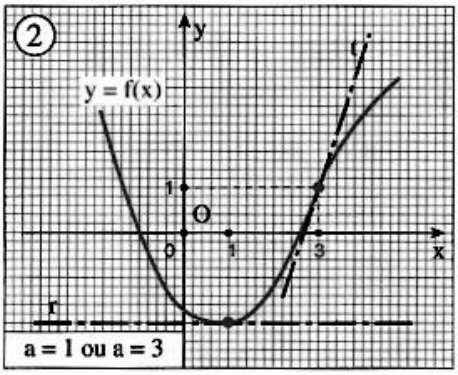
3) $y = \dfrac{1}{(2x-1)^3}$, $a = 1$;

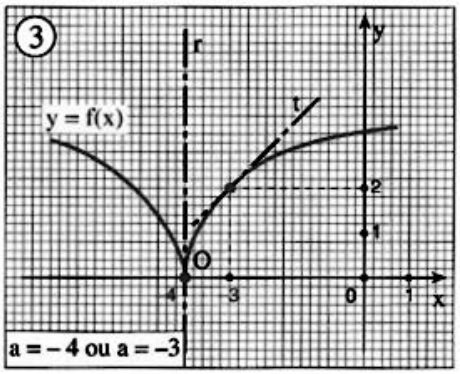
Exercice 8

a) À l'aide de chacun des graphiques suivants, calculez le coefficient angulaire des tangentes *r* et *t* en un point d'abscisse *a* donné.

b) Déduisez-en chaque fois le nombre dérivé de la fonction pour x=a

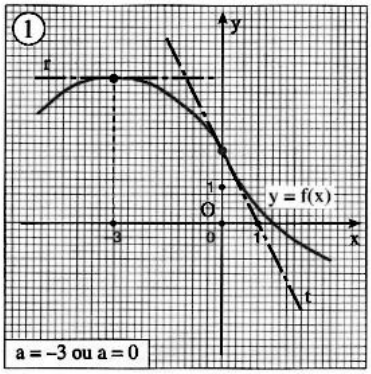


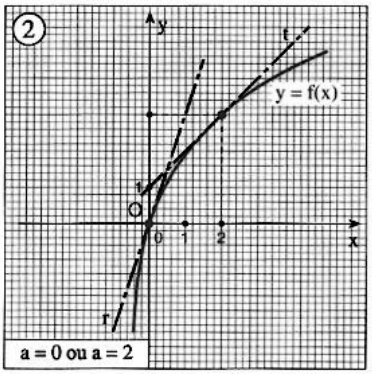


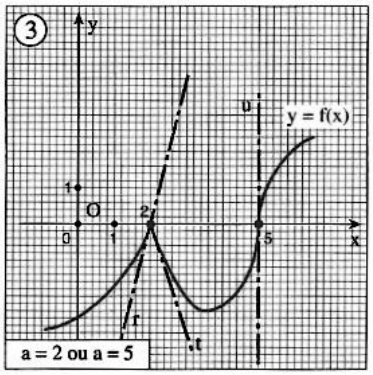


Exercice 9

En observant les graphiques suivants, déterminez f'(a) et une équation cartésienne des tangentes r, t et u à Gf au point d'abscisse a:

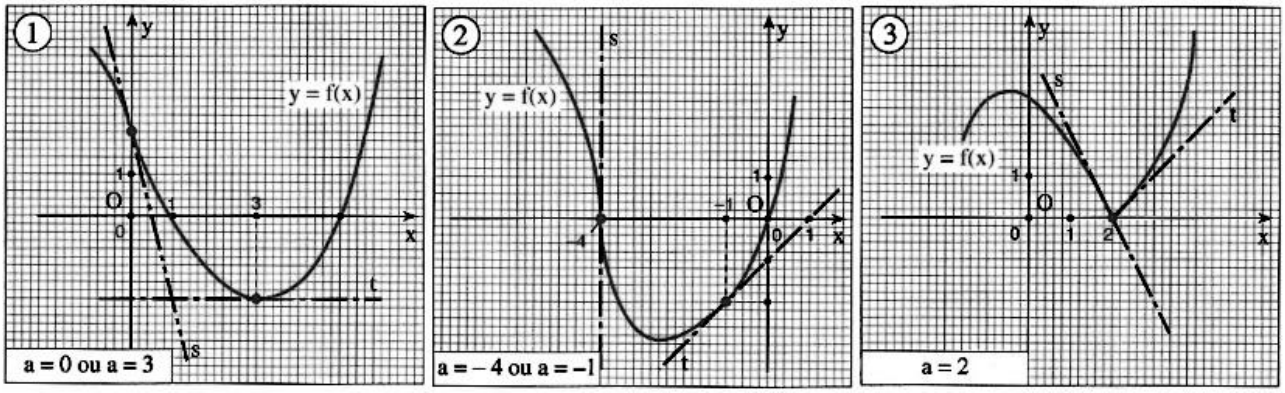






Exercice 10

Observez les tangentes à Gf au point d'abscisse *a*, déterminez si la fonction est dérivable au point d'abscisse *a*. Justifiez chaque fois la réponse.



Exercice 11

On demande de calculer une valeur approchée de $\dfrac{1}{2{,}0001}$

a) Aidez-vous à cette fin de la fonction: $f : R \to R : x \to \dfrac{1}{x}$ et calculez sa dérivée.

b) Choisissez un entier *a* proche de 2,0001; calculez son image par f et son image par f '

c) Si h = 0,0001; trouvez la valeur approchée demandée.

d) Comparez la valeur trouvée au résultat donné par la calculatrice.

Exercice 12

L'espace parcouru (en mètres) par un mobile est décrit, en fonction du temps t, par l'équation horaire:

1) $e(t) = 3t + 5$

2) $e(t) = \dfrac{3}{2}t^2 + 5t - 1$

Déterminez, pour chacun de ces mouvements, la vitesse instantanée du mobile.

Quelle est sa vitesse au temps t = 0 ?

Exercice 13

Un athlète court un 100 mètres et sa position après t secondes est donnée par l'équation horaire:

$e(t) = \dfrac{1}{2}t^2 + 4t$

a) Quelle est sa vitesse après 6 secondes ?

b) Quelle est sa vitesse sur la ligne d'arrivée ?

Exercice 14

Une balle est lancée verticalement vers le haut avec une vitesse de 300 m/s et sa hauteur est décrite par la loi horaire $f : R^+ \to R : t \to 300\,t - 5\,t^2$ (temps en secondes; espace en mètres).

a) Trouvez la vitesse de la balle 10 secondes après le lancement.

b) Après combien de secondes la balle cesse-t-elle de monter pour entamer la chute ?

4 ÉTUDES DE FONCTIONS ET AUTRES APPLICATIONS

4.1 Théorie

Deux chapitres sont consacrés à l'étude de fonctions dans le syllabus de théorie aux pages 79 et 85.

4.2 Exercices

4.2.1 Les fonctions dans la vie quotidienne

Exercice 1

Vous envisagez l'achat d'une imprimante.

Vous souhaitez comparer deux imprimantes sur le plan du coût global d'impression.
Ce coût global doit inclure le prix d'achat et le coût à la page. NB: le prix d'achat est comptabilisé en une fois et ne sera pas réparti sous forme d'un amortissement.

Modèle	Prix d'achat	Coût à la feuille
P1	560,00 €	0,03 €
P2	120,00 €	0,12 €

À réaliser

1°) Exprimez sous forme de fonctions mathématiques le coût total (prix d'achat + coût d'impression) en fonction du nombre de feuilles imprimées pour les deux imprimantes: P1 et P2
Pour **P1**, la fonction sera notée **f(x)** avec x qui représente le nombre de pages imprimées.
Pour **P2**, la fonction sera notée **g(x)** avec x qui représente le nombre de pages imprimées.

2°) Quel est le degré de ces fonctions ?
Ces fonctions correspondent-elles à une droite, une parabole, une hyperbole ?

3°) Pour chaque fonction, déterminez le coefficient angulaire (également appelé coefficient directeur), l'ordonnée à l'origine.

4°) Déterminez le montant total dépensé (prix d'achat + coût d'impression) dans les cas suivants.

Nb de pages imprimées	Montant total dépensé avec P1	Montant total dépensé avec P2
1000		
3000		
5000		
7000		

5°) Tracez le graphique. Note: graduez l'axe des abscisses de 0 à 10000 et graduez l'axe des ordonnées de 0 à 1500.

6°) Ces fonctions sont-elles croissantes ou décroissantes ?

7°) Une imprimante (P1 ou P2) est-elle toujours plus intéressante que l'autre d'un point de vue du coût ?

8°) Après combien de copies, le modèle P1 devient-il plus intéressant que le modèle P2 ?

IMPORTANT

Faisons abstraction du contexte, et prenons les fonctions f(x) et g(x) sur le plan purement mathématique.

9°) Pour chaque fonction, déterminez le domaine de définition.

10°) Ces fonctions sont-elles paires, impaires, ni paires ni impaires ?

11°) Calculez la dérivée première de chacune de ces fonctions.
Quel est l'intérêt de calculer la dérivée première d'une fonction ?

Exercice 2 (même type de développement que dans l'exercice n°1)

Vous envisagez l'embauche d'une travailleuse.

Vous avez le choix entre deux personnes qui ont le même âge. Ces deux personnes ne nécessitent pas la même formation avant de pouvoir être productives. Le salaire proposé ne sera pas le même également. **L'objectif est de comparer le coût total représenté par ces travailleuses en incluant le coût de la formation initiale et du salaire mensuel. NB: le coût de la formation est comptabilisé en une fois.**

Personne	Coût de la formation	Salaire mensuel
Caroline	350,00 €	1650,00 €
Sylvie	9200,00 €	1250,00 €

IMPORTANT

Il est important de noter qu'il s'agit d'une approche très simplifiée de l'embauche d'une personne.

À réaliser

1°) Exprimez sous forme de fonctions mathématiques le coût total en fonction du nombre de mois prestés pour les deux personnes.
Pour **Caroline**, la fonction sera notée **f(x)** avec x qui représente le nombre de mois prestés.
Pour **Sylvie**, la fonction sera notée **g(x)** avec x qui représente le nombre de mois prestés.

2°) Quel est le degré de ces fonctions ?
Ces fonctions correspondent-elles à une droite, une parabole, une hyperbole ?

3°) Pour chaque fonction, déterminez le coefficient angulaire (également appelé coefficient directeur), l'ordonnée à l'origine.

4°) Déterminez le coût total (coût de formation + coûts salariaux) dans les cas suivants.

Nb de mois prestés	Coût total pour Caroline	Coût total pour Sylvie
5		
20		
30		
50		

5°) Tracez le graphique. Note: graduez l'axe des abscisses de 0 à 60 et graduez l'axe des ordonnées de 0 à 90000.

6°) Ces fonctions sont-elles croissantes ou décroissantes ?

7°) Après combien de mois, Caroline a-t-elle nécessité des « dépenses » supérieures (formation + salaires) à celles de Sylvie ?

IMPORTANT

Faisons abstraction du contexte, et prenons les fonctions f(x) et g(x) sur le plan purement mathématique.

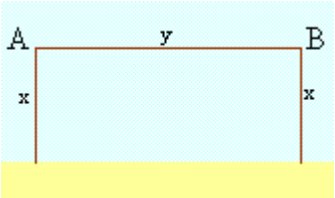
8°) Pour chaque fonction, déterminez le domaine de définition.

9°) Ces fonctions sont-elles paires, impaires, ni paires ni impaires ?

10°) Calculez la dérivée première de chacune de ces fonctions.
Quel est l'intérêt de calculer la dérivée première d'une fonction ?

Exercice 3

Un maître-nageur dispose d'une corde de 160 m de longueur pour délimiter un rectangle de baignade surveillée.
À quelle distance du rivage doit-il placer les bouées A et B pour que le rectangle ait une aire maximale ?



Indices:

- Ecrivez la formule permettant de calculer l'aire en fonction de x et y
- Compte-tenu des données figurant dans l'énoncé, exprimez y en fonction de x.
- Exprimez l'aire uniquement en fonction de x.
- Représentez graphiquement la fonction donnant l'aire en fonction de x.
- Déterminez la valeur de x pour laquelle l'aire sera maximale. Faites une première approche graphique, ensuite calculez la dérivée première et faites une étude de signe sur celle-ci.

Exercice 4

Contexte:

Dans une institution de soins aux personnes, supposons que des statistiques aient été réalisées concernant le nombre de soins réalisés en moyenne par année et par prestataire. L'objectif est d'observer la variation du nombre de soins prestés annuellement en fonction de l'âge du prestataire.

Suite aux données récoltées, il a été possible de définir la fonction suivante qui nous donne (théoriquement et en moyenne) le nombre de soins prestés annuellement en fonction de l'âge du prestataire.

$$f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 17x + 4647$$

x représente l'âge du prestataire. Par exemple, si le prestataire a 31 ans, x = 31

À réaliser:

1°) En utilisant la fonction, complétez le tableau suivant.

Age du prestataire	**Nombre de soins prestés annuellement** (théoriquement et en moyenne)
30	
40	
50	
60	

2°) Quel est le degré de cette fonction ?

3°) Tracez le graphe de cette fonction. Conseil: graduez l'axe des ordonnées de 4930 à 5020.

4°) Calculez la dérivée première de cette fonction.

5°) Effectuez une étude de signe sur la dérivée première et déterminez la croissance et la décroissance de la fonction.

6°) A quel âge un prestataire réalise-t-il le plus de soins annuellement ?

<u>Exercice 5</u>

Un projectile est lancé sous un angle de 45° avec une vitesse initiale de 313 m/s.

En prenant des axes dont
- l'origine est le point de départ,
- l'axe des abscisses est horizontal,
- l'axe des ordonnées est vertical,

on peut admettre que l'équation de la trajectoire écrite en km, est donnée par $y = x - \frac{x^2}{10}$

où x est la distance parcourue horizontalement,
y est la hauteur atteinte.

1) Tracez le graphe cartésien de la trajectoire du projectile, en prenant en abscisses et en ordonnées 1 cm pour 1 km.

2) Trouvez la portée du lance-projectile, c'est-à-dire la distance entre le point de lancement et le point d'impact (supposés sur la même horizontale).

3) A quelle hauteur se trouve l'obus à une distance de: 1,5 km; 3,5 km; 5 km; 6,8 km du point de lancement ?

   Déterminez cette hauteur :

   a) en utilisant le graphe cartésien;
   b) par calcul.

4) Quelle est la hauteur maximale atteinte par le projectile ?

4.2.2 Autres exercices

Effectuez une étude des fonctions suivantes.

1°) Domaine de définition.
2°) Asymptotes.
3°) Intersections avec les axes.
4°) Parité de la fonction.
5°) Calcul et étude de f'(x) et dans certains cas f''(x).
6°) Tableau de synthèse (tableau de variation).
7°) Graphe.

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4 \quad \text{(dérivée seconde à calculer et à étudier)}$$

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x}$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x \quad -1}$$

$$f(x) = 3 - \frac{4}{1-x} - x$$